Numerická matematika - Domácí úloha

Numerická integrace diferenciálních rovnic Runge-Kuttova metoda 2. řádu

Vypracoval: Petr Dvořák

Motivace: Častokrát se setkáváme s potřebou řešení diferenciálních rovnic. Klasické metody (substituce proměnných, variace konstant) však někdy mohou být nepoužitelné, proto zde přichází ke slovu numerická matematika. Úlohu $y' = f(x, y(x))$ řešíme aproximací funkce y - pro vyjádření přibližné hodnoty funkce y používáme iterační předpis $y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h)$. Označili jsme $y(x_i) = y_i$, φ budeme nazývat přírůstkovou funkcí, h je délka dělících intervalů.

Popis: Runge-Kuttova metoda 2. řádu[1] je (jednokroková) iterační metoda výhodná proto, že v přírůstkové funkci nekalkuluje s derivací f'. Používá přírůstkovou funkci ve tvaru:

$$\varphi(x, y, h) = \sum_{i=1}^{2} \omega_i k_i = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2$$

kde ω_i jsou konstanty a k_i vyjádříme jako:

$$k_i = f(x + \alpha_i h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j) \qquad \alpha_0 = 0, \beta_{0j} = 0$$

Po dosazení tedy můžeme psát:

$$\varphi(x, y, h) = \omega_1 f(x, y) + \omega_2 f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y))$$

Dostali jsme nějaké vyjádření přírůstkové funkce. Musíme teď tedy vhodně určit konstanty ω_1, ω_2, α a β, tak, aby metoda byla 2. řádu. Idea je následující:

Rozepíšeme si na jedné straně přesný relativní přírůstek pomocí Taylorova rozvoje až po $O(h^2)$ (použijeme přitom větu o derivaci složené funkce) a na straně druhé vyjádření přírůstkového zobrazení. Dostáváme:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = A + O(h^2) = f + \frac{1}{2}(f_x + f_y f)h + O(h^2) \tag{1}$$

$$\varphi(x, y, h) = B + O(h^2) = \omega_1 f + \omega_2 (f + \alpha h f_x + \beta h f f_y) + O(h^2) \tag{2}$$

$$\varphi(x, y, h) = (\omega_1 + \omega_2) f + \omega_2 \alpha h f_x + \omega_2 \beta h f f_y + O(h^2)$$

Nastavíme konstanty ω_1, ω_2, α a β tak, aby platilo, že $A = B$, tedy porovnáme koeficienty u f, hf_x a $hf_y f$. Dostaneme tři rovnice o 4 neznámých. Zvolíme tedy libovolně třeba ω_1 a dopočteme zbývající konstanty (pro $\omega_1 = 0$ vyjde $\omega_2 = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta = \frac{1}{2}$). Přírůstkovou funkci tedy můžeme zapsat (použijeme-li hodnoty z příkladu) jako:

$$\varphi(x, y, h) = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hf(x, y))$$

[1] Řekneme, že jednokroková metoda je řádu p, jestliže $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \varphi(x, y(x), h) + O(h^p)$

Závěr: Runge-Kuttovu metodu druhého řádu lze tedy zapsat v následujících dvou bodech (které opakujeme pro každý bod dělení a postupně přepočítáváme jednotlivé hodnoty):

1. $\varphi(x_i, y_i, h) = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(x_i, y_i))$
2. $y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h)$