Numerická matematika - Domácí úloha

# Konstrukce přirozeného kubického spline

Vypracoval: Petr Dvořák

**Úvodní definice:**

Nechť je dáno dělení intervalu $[a, b], a = x_0 < ... < x_n = b$ a nechť $x_i$ jsou navzájem různé. Řekneme, že funkce $\varphi : [a, b] \to R$ je přirozený kubický spline, jestliže platí současně:

1. $\varphi''$ je spojitá,
2. $\varphi_i = \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]}$ je kubický polynom, pro $i = 0, 1, ..., n-1$,
3. $\varphi''(a) = \varphi''(b) = 0$ (specifické pro přirozený kubický spline).

**Konstrukce přirozeného kubického spline:**

Nejprve si potřebujeme uvědomit, že vlastně konstruujeme kubickou křivku na $n$ intervalech, tedy máme $4n$ stupňů volnosti. Musíme tedy mít k dispozici $4n$ rovnic, které nám celý výsledný spline popisují.

První požadavek, který na kubický spline klademe, je tento:

$$\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0, ..., n$$

Pro každý bod $x_i$, $i = 0, ..., n$ tak dostaneme jednu rovnici, máme tedy $n + 1$ rovnic.

Dále si uvědomíme požadavky na spojitost ve vnitřních bodech dělení intervalu (tedy s vynecháním krajních bodů, kde je kubický spline spojitý jednostranně) funkce $\varphi$, její první i druhé derivace. Dostáváme tak $n - 1$ rovnic pro funkci $\varphi$, $n - 1$ rovnic pro $\varphi'$ a $n - 1$ rovnic pro $\varphi''$. Získali jsme tedy $3n-3$ rovnic... Po přičtení $n+1$ rovnic z předchozího odstavce máme $4n-2$ rovnic.

Poslední úvahou, kterou na úvod provedeme, je použití podmínky 3 z definice přirozeného kubického spline, tedy faktu, že $\varphi''(a) = \varphi''(b) = 0$. Doplnili jsme tedy zbývající dvě rovnice, které jsme potřebovali.

V dalším postupu konstruujeme vyjádření funkce (resp. n funkcí) $\varphi_i$ pomocí momentů. Definujme i-tý moment jako:

$$M_i = \varphi''(x_i)$$

Je-li $\varphi_i$ kubický polynom, je $\varphi_i''$ přímka procházející body $[x_i, M_i]$ a $[x_{i+1}, M_{i+1}]$. Platí tedy (definice rovnice přímky + úpravy):

$$\varphi_i''(x) = -\frac{M_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_{i+1}) + \frac{M_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \tag{1}$$

*Posloupnost úprav, které jsme provedli od přímočaré definice přímky pomocí směrnice je následující: Zapíšeme rovnici přímky s vyjádřenou směrnicí a neznámou konstantou posunutí po ose y*

$$\varphi''(x) = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}x + c$$

*Zapíšeme fakt, že v bodě $x_i$ prochází přimka bodem $M_i$ a v bodě $x_{i+1}$ prochází přimka bodem $M_{i+1}$. Výsledné rovnice sečteme a vyjádříme konstantu posunu c.*

$$M_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}x_i + c$$

$$M_{i+1} = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}x_{i+1} + c$$

$$M_{i+1} + M_i = (x_{i+1} + x_i)\frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} + 2c$$

$$c = \frac{M_i x_{i+1} - M_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

*Dosadíme c do vyjádření $\varphi''(x)$ a upravíme na tvar rovnice (1)*

Z vyjdření $\varphi''$ postupnou integrací (podle $x$) dostáváme:

$$\varphi_i'(x) = -\frac{M_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_{i+1})^2 + \frac{M_{i+1}}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2 + A_i \tag{2}$$

$$\varphi_i(x) = -\frac{M_i}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_{i+1})^3 + \frac{M_{i+1}}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^3 + A_i x + \Phi_i \tag{3}$$

Konstantu $\Phi_i$ navíc můžeme výhodně rozepsat jako $\Phi_i = B_i - A_i x_i$, poslední rovnici (a tak i vyjádření funkce $\varphi_i$) tedy dostáváme ve tvaru:

$$\varphi_i(x) = -\frac{M_i}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_{i+1})^3 + \frac{M_{i+1}}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^3 + A_i(x - x_i) + B_i$$

Z těchto rovnic nejprve vyjádříme $A_i$ a $B_i$ pro $i = 0, ..., (n-1)$. K tomu využijeme následující vlastnosti (neboli dosadíme do předchozí rovnice $x_i$, resp. $x_{i+1}$ a srovnáme s $f(x_i)$, resp. $f(x_{i+1})$):

$$\varphi_i(x_i) = f(x_i)$$

$$\varphi_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

Tedy po dosazení:

$$f(x_i) = \frac{M_i(x_i - x_{i+1})^3}{6(x_{i+1} - x_i)} + B_i$$

$$f(x_{i+1}) = \frac{M_{i+1}(x_{i+1}-x_i)^3}{6(x_{i+1}-x_i)} + A(x_{i+1}-x_i) + f(x_i) + \frac{M_i(x_i+x_{i+1})^2}{6}$$

Vyjde nám, že:

$$B_i = f_i - \frac{M_i}{6}(x_{i+1}-x_i)^2$$

$$A_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{M_i+M_{i+1}}{6}(x_{i+1}-x_i)$$

Následně sestavíme rovnice pro momenty, příčemž využijeme následujícího: Konstruujeme přirozený kubický spline, proto (viz. definice bod 3) víme, že $M_0 = M_n = 0$. Hledáme tedy $n-1$ rovnic pro momenty ve vnitřních bodech dělení. Použijeme dosazení výše vypočteného $A_i$ a podmínku spojitosti první derivace (resp. požadavek na to, aby nám křivka "hladce" navazovala v dělících bodech):

$$\varphi_i'(x_i) = \varphi_{i+1}'(x_i)$$

Označíme-li $h_j = x_{j+1} - x_j$ (zde jsme možná měli být důslední a zavést toto značení od začátku), dostaneme rovnice tvaru:

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = -\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}$$

Tyto rovnice je možno zapsat do (třídiagonální) matice... Můžeme tedy dopočítat momenty a dosadit je do vyjádření $\varphi_i$.