Numerická matematika - Domácí úloha

Gaussův kvadraturní vzorec

Vypracoval: Petr Dvořák

a) obecně

Definice: Kvadraturní formule $I(f)$ je předpis

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i),$$

kde α_i jsou koeficienty kvadraturní formule a x_i jsou uzly kvadraturní formule.

Mějme dánu funkci f a dále body $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Umíme dopočítat hodnoty $f(x_i)$ a chceme numericky spočítat integrál funkce f a využít přitom kvadraturní vzorec. Abychom hodnotu integrálu pomocí kvadraturního vzorce mohli určit přesně, může být tento řádu nejvýše $2n+1$.

Počítáme-li integrál pomocí kvadraturního vzorce, záleží jak na volbě dělících bodů x_i, tak koeficientů α_i. Gaussova kvadratura je postup jak volit x_i a následně dopočítat α_i, aby byl výpočet kvadratury přesný pro polynom stupně nejvýše $n + 1$.

V Gaussově kvadratuře volíme body x_i tak, aby $p_{n+1} = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$ byl z množiny ortogonálních polynomů $\{p_0, ..., p_{n+1}\}$ (tedy body x_i jsou kořeny příslušného ortogonálního polynomu řádu $n + 1$).

Hledáme dále koeficienty α_i, pro které platí:

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(x_i), \quad g \in \Pi_{2n+1} \tag{1}$$

Polynom g vyjádříme jako $g(x) = r(x)p_{n+1}(x) + s(x), \quad r, s \in \Pi_n$.

Speciálně položme $s(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k p_k(x)$.

Dosazením našeho vyjádření polynomu g do integrálu v (1) dostaneme:

$$\int_a^b g(x)dx = \gamma_0(b - a) \tag{2}$$

Dosazením do sumy v (1) dostaneme:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sum_{k=0}^{n} \gamma_k p_k(x_i) \tag{3}$$

Oba výše uvedené výrazy lze tedy zapsat jako lineární kombinaci γ_i. V případě rovnice (2) je v tomto vyjádření nenulový koeficient pouze u γ_0. Porovnáním výrazů dostaneme rovnice pro výpočet koeficientů α_i, které můžeme jednoduše zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} p_0(x_0) & \ldots & p_0(x_n) \\ p_1(x_0) & \ldots & p_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n(x_0) & \ldots & p_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

b) pro $n = 0$ na $[-1, 1]$

Postupujme podle výše uvedeného. Dosadíme nejprve konkrétně do vzorce (1):

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \alpha_0 g(x_0) + \alpha_1 g(x_1)$$

Chceme dopočítat α_0 a α_1. Zvolíme proto ortogonální polynomy stupně 0 a 1, tedy třeba $p_0 = 1$ a $p_1 = x$. Dosadíme hodnoty těchto polynomů v bodech x_0 a x_1 a krajní body intervalu [-1, 1], tedy $b = 1$, $a = -1$ do vztahu (4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešením této soustavy rovnic jsou hodnoty:

$$\alpha_0 = \frac{-2x_1}{x_0 - x_1}, \qquad \alpha_1 = \frac{2x_0}{x_0 - x_1}$$

Vysázeno systémem LaTeX